# Кинематическое моделирование и управление роботизированным мнипулятором с использованием дуальных кватернионов

Основные моменты

* Кинематическое моделирование и управление положением роботизированного манипулятора с несколькими степенями свободы.
* Компактная и простая формулировка.
* Использование дуальных кватернионов и его алгебры.

Выписка

Эта статья использует винтовую теорию , выраженную через единичное двойное кватернионное представление и ее алгебру, чтобы сформулировать как прямое (положение + скорость) кинематика и управление положением роботизированного манипулятора с n степенями свободы эффективным способом. Эффективность заключается в меньшем использовании компьютерной памяти, в быстром вычислении уравнений, в представлении пространства задач без особенностей, в устойчивости к числовым ошибкам и в компактности представлений. Формулировка проста, интуитивно понятна и проста в реализации. Мы подтвердили эту формулировку экспериментально на манипуляторе с 7 степенями свободы.

## 1.Введение

Представление положения с помощью дуальных квантерионов (позиция + ориентация) получила большое внимание сообщества робототехники как для кинематического моделирования, так и для целей управления [ 1-8 ] только недавно, хотя его эффективность хранения [и](#page7) вычислений над матрицей однородного преобразования (МОП) была известна уже более двух десятилетий [ 9 , 10 ]. Исследование [ 11 ] показывает превосходную производительность дуальных квантерионов по сравнению с МОП при кинематическом моделировании n[- DOF](#page7) рука робота, а недавно в [ 12 ] для пропорционального управления. Другими привлекательными преимуществами дуальных квантерионов являются беспрепятственное представление евклидова пространства, устойчивость к числовым ошибкам и компактность представления. дуальных квантерионов также эффективно используется в компьютерной графике [ 13 ], в автоматизированном проектировании [ 14 ], в компьютерном зрении [ 15 ], в навигации [ 16 ] и так далее.

Наиболее известный метод кинематики роботов основан на нотациях Денавита и Хартенберга (DH) [ 17 ] и однородное преобразование точек через МОП [ 18 ]. Так

далеко все существующие работы [ [4-6 , 11 ]](#page7) Моделирование кинематики роботов с помощью ДК продолжает следовать подходу DH. Мы думаем, что DH тратит некоторую часть ДК, так как первый дизайн DH основан на точечных преобразованиях с МОП.

* этой статье для кинематического моделирования мы использовали подход теории винтов, основанный на преобразованиях линий, представленных в [ 19 ], и мы адаптировали его к единичному двойному кватернионному представлению и его алгебре, поскольку ДК

был найден как наиболее компактный и эффективный способ выражения смещения винта [ 9 , 10 ]. Для целей кинематического управления мы использовали логарифм единицы измерения двойного кватерниона в качестве обобщенного закона пропорционального управления, впервые введенного в [ 1 ] и мы также проанализировали его глобальную стабильность с точки зрения диапазонов значений винтовых параметров. Определение ошибки позы между двумя единичными позными двойными кватернионами должно выполняться с помощью оператора умножения алгебры двойных кватернионов, а не с помощью оператора вычитания, как это делается в [ 5 , 6 ], что не правильно (хотя стабильность закона о контроле доказана). Некоторые недавние работы [ 7 , 8 ] использовал ДК для разработки устойчивых законов управления и для гибкого моделирования кооперативных пространств задач, передавая ℜ 8 многообразие для получения недостающего коммутативного свойства обратно через операторы Гамильтона

(8 × 8 матриц), однако оставляя вычислительные преимущества алгебры ДК. Можно также подумать, чтобы использовать Родригес эффективная формула вращения через позу твердого тела, представленную трехмерным вектором перемещения и четырехмерным вектором вращения с параметрами оси-угла Родрига. Мы называем это представление как TAA. Отметим, что TAA имеет особенность. Всякий раз, когда результирующий угол в TAA равен нулю, осевая часть представления вращения не определена [ 20 ]. В таблице 1 перечислены требования к хранению и вычислительным затратам для преобразования твердого тела в 4 различных представлениях: матрице однородного преобразования (HTM), в единичных двойных кватернионах с операторами Гамильтона (ДКwH), в позе с параметрами Родригеса (TAA) и в единичных двойных кватернионах (ДК) , Хотя TAA требуется меньше места для хранения, отметим, что для него требуется 7 тригонометрических функций и 1 вычисление функции с квадратным корнем. Более того, перечисленные в Таблице 1 , TAA также не хватает эффективной алгебры

Эта статья эффективно объединяет все преимущества теории винтов, основанной на ДК и в её алгебре для кинематического моделирования, и позволяет управлять роботом-манипулятором и экспериментально проверяет его. Каждая соответствующая работа в рецензируемой литературе каким-то образом упускает один момент, объединяя все это вместе, как это обсуждалось выше.

* Все преимущества ( т.е. компактность, хранение, вычислительная эффективность и т. д.) единичного двойного кватернионного представления и его алгебры.
* Кинематика прямого положения (FPK), впервые, записывается в двойном пространстве с формулой экспоненты (POE) формулы винтовой теории, заменяя матричные экспоненты единичными двойными кватернионами. Все выражено в единой системе отсчета ( т.е. в рамках домашнего робота). Это делает FPK более простым и интуитивно понятным. Следствием этой формулировки является то, что вычисление робота Якобиана является простым и быстрым.
* Проблемы кинематического моделирования и управления позой манипулятора робота решаются компактно с меньшим количеством арифметических операций и требований к хранению, чем у многих существующих подходов, предложенных в литературе по робототехнике.
* Корректность предложенных подходов кинематического моделирования и управления подтверждена экспериментально на манипуляторе с 7 степенями свободы.
* Все переменные и уравнения объясняются четко и без какой-либо двусмысленности. То есть, например, переменная позы точно указывается, в каком кадре она определена и в каком кадре она выражена. Документ также самодостаточен, так что можно реализовать все, что представлено здесь, без поиска какой-либо другой соответствующей справки или книги.

Остальная часть статьи идет следующим образом:

Раздел 2 объясняет позу(позиция + ориентация) представление рабочего органа, прямого положения и кинематики скорости робота; Раздел 3 сначала определяет ошибку позы, затем он предлагает закон управления для регулирования этой ошибки позы, и, наконец, он анализирует стабильность предлагаемого закона управления; Раздел 4 экспериментально проверяет предложенную теорию кинематического моделирования и управления на руке робота. И наконец раздел 5 завершает работу.

Также отметим, что для лучшего понимания статьи читатель может приложение для получения дополнительной информации о кватернионах, двойных числах и двойных кватернионах

## 2.Кинематическое моделирование

### 2.1. Представление представления.

Мы представляем положение и ориентацию концевого рабочего органа руки робота с единичным двойным кватернионом единичный сдвоенный вектор направленной трехмерной линии:

(1)

Где и соответственно двойной угол и единичный двойной вектор направленной 3D-линии:

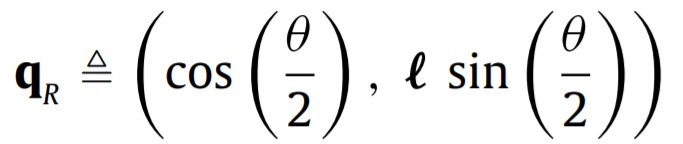
(2)

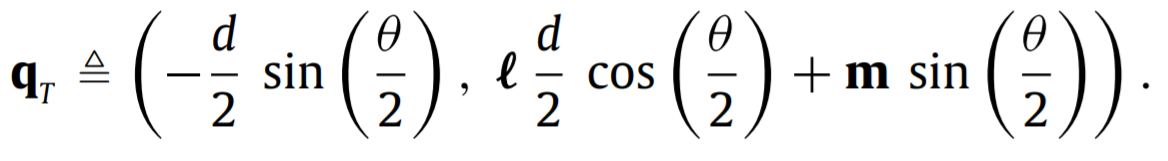
Выше, { *θ, d, ℓ, m*} параметры смещения винта. *θ --* угол поворота вокруг оси винта, *d* -- это перевод по той же винтовой оси, *ℓ--* является вектором направления единицы этой винтовой оси, и

является вектором момента этой винтовой оси, вычисленным относительно начала домашнего каркаса манипулятора робота. Eq. (1) можно переписать в терминах кватернионной пары следующим образом:

(3)

Где единица кватерниона для вращения и кватернион трансформации. Эти кватернионы вращения и перемещения могут быть записаны с известными параметрами смещения винта [ 15 ] как показано ниже:





Это представление компактно, быстро, устойчиво и не имеет особенностей [ 9 , 10 ].

## 2.2. Кинематика прямого положения

Здесь мы отмечаем текущие совместные значения робота-манипулятора при

и его родной конфигурации с Затем, для простоты вычислений, сначала мы перемещаем плечо в положение а затем мы помещаем рычаг базовой рамы и на рычаг рамы рабочего органа Таким образом, отношение положений между рычагом базовой рамы и на рычаг рычагом рамы рабочего органа определяет дуальный кватернион, , пока

Пусть дуальный кватернион, который либо вращает, либо передаёт (или и то, и другое) раму рабочего органа вокруг оси винта i-го соединения, в то время как остальные соединения заблокированы.

Другими словами, каждый из этих дуальных кватернионов представляет собой относительное смещение рамы рабочего органа из общей исходной конфигурации Тогда, для любого отклонения от исходной конфигурации положение рабочего органа робота манипулятора можно рассчитать, умножив все эти дуальные кватернионы последовательно перемещаясь по суставам:

**(6)**

Результирующая дуальный кватерниона представляет собой новую позу рабочего органа руки относительно , выраженного в .

Важен порядок умножения единичных двойных кватернионов. Он должен быть записан последовательно справа налево, начиная с последнего сустава (т. е. ближайшего к рабочему органу, например, здесь до первого сустава (т. е. ближайшего к основанию робота, например, здесь

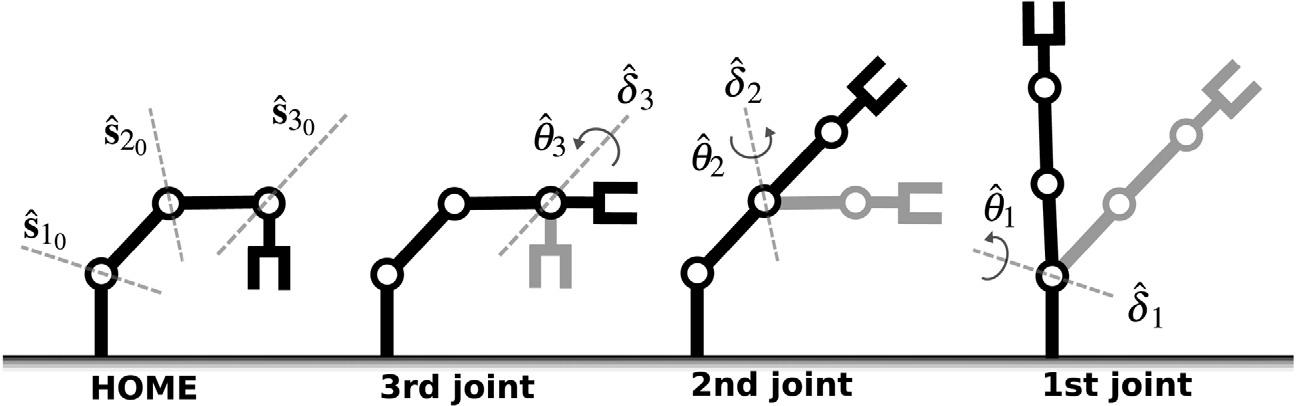


Рисунок 1. Простая иллюстрация того, как кинематика переднего положения применяется к манипуляру робота с 3 степенями свободы.

Отныне в этом разделе, если не указано иное, все переменные выражаются в домашней раме робота

Чтобы вычислить (6), мы выражаем единичный двойной кватернион a следующим образом:

(7)

где двойной угол является относительным смещением сустава относительно положения домашнего положения:

(8)

Если соединение вращается, то Если сустав призматический, то Дуальный вектор представляет собой ось шарнирного винта, рассчитанную в домашней конфигурации с точки зрения координат линии Плюккера:

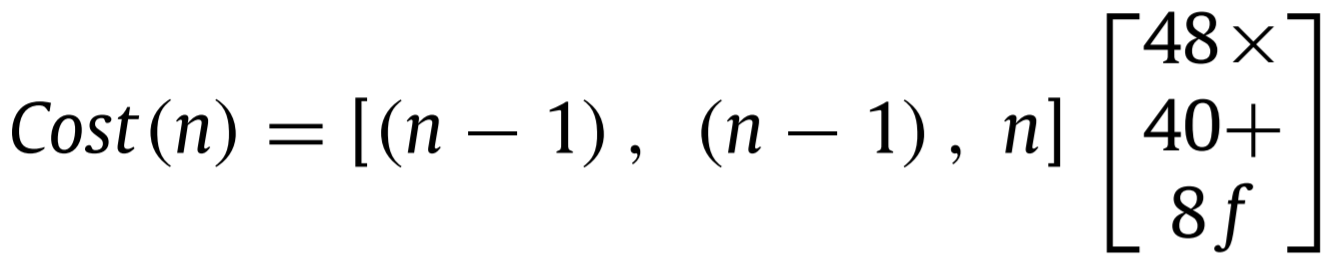
(9)

С вектор, показывающий направление оси соединения, и с вектор момента этой оси соединения около начала координат домашней рамы:

(10)

Здесь, представляет собой вектор положения от начала координат домашней рамы до любой точки, лежащей на оси соединения (например, вычисляемое положение центра соединения в домашней конфигурации). Таким образом функция, измеримая относительной совместной величины и известной { } в домашней конфигурации. Домашняя конфигурация может быть выбрана такой, что и просты для записи. Рисунок 1 показывает, как кинематика передвижения позиции постепенно применяется на манипуляторе с 3 степенями свободы. на рисунке 1, самая левая форма робота выбрана в качестве домашней конфигурации, и мы хотим найти правую конечную позу рабочего органа робота по отношению к конечной позе рабочего органа робота робота в домашней конфигурации. Для этого мы сначала вычисляем совместные перемещения, а затем применяем дуальные кватернионные преобразования этих перемещений последовательно, начиная от последнего соединения к первому соединению.

Анализ затрат. Рука робота с n степенями свободы, которая использует (6) для вычисления своей кинематики переднего положения, требует:

 (11)

операции умножения и сложения и блоки памяти с плавающей точкой . Например, 6-осевой робот манипулятор требует 240× и 200+ операций и 48f блоков памяти для вычисления кинематики его переднего положения.

Если бы мы использовали подход Денавита–Хартенберга для вычисления кинематики переднего положения n-степенного робота манипулятора с помощью дуальных кватернионов, то нам потребовалось бы, по крайней мере больше операций умножения и сложения и блоков памяти с плавающей запятой, чем используя (11).

### 2.3. Прямая кинематика скорость

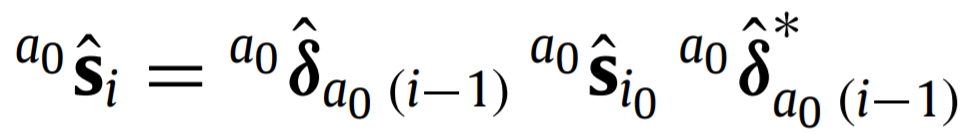
Якобиан робот манипулятора связывает скорости движений сустава со скоростью положения рабочего органа:

(12)

Где сдвоенная пространственная скорость поворота рамы рабочего органа относительно базовой рамы выраженная в базовой раме робота Выше вектор поступательной скорости, а вектор скорости вращения. Матрица является двойным пространственным Якобианом руки робота, выраженная в базовой раме робота Двойной пространственный Якобиан есть не что иное, как двойной вектор осей шарнирного винта:

(13)

где единичный двойной вектор выраженная в базовой раме робота может быть вычислен из его известных значений в домашней конфигурации, приведенной в (9) в виде:

 (14)

Где представляет полное влияние смещения предыдущих соединений i-1 на ось винта I-го соединения:

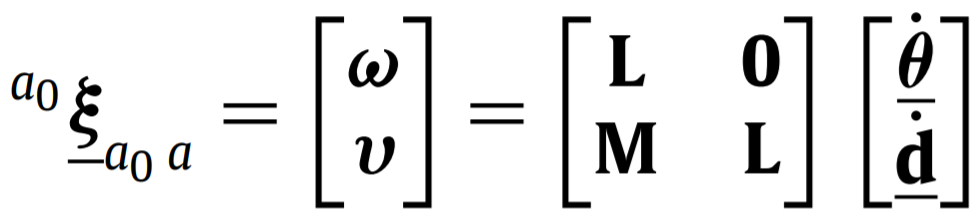
(15)

В (14) оператор представляет собой классический кватернионный конъюгат ассоциированного дуального кватерниона. Он используется либо для преобразования линии [15], либо для вычисления обратного положения дуального кватерниона. Заметим также, что в (14), если то

*Анализ затрат*. *N*-осевой манипулятор, который использует (13) для вычисления своего Якобиана через (14), требуется:

операции умножения и сложения. Например, для вычисления Якобиана 6-осового робота манипулятора требуется 480× и 400+ операций.

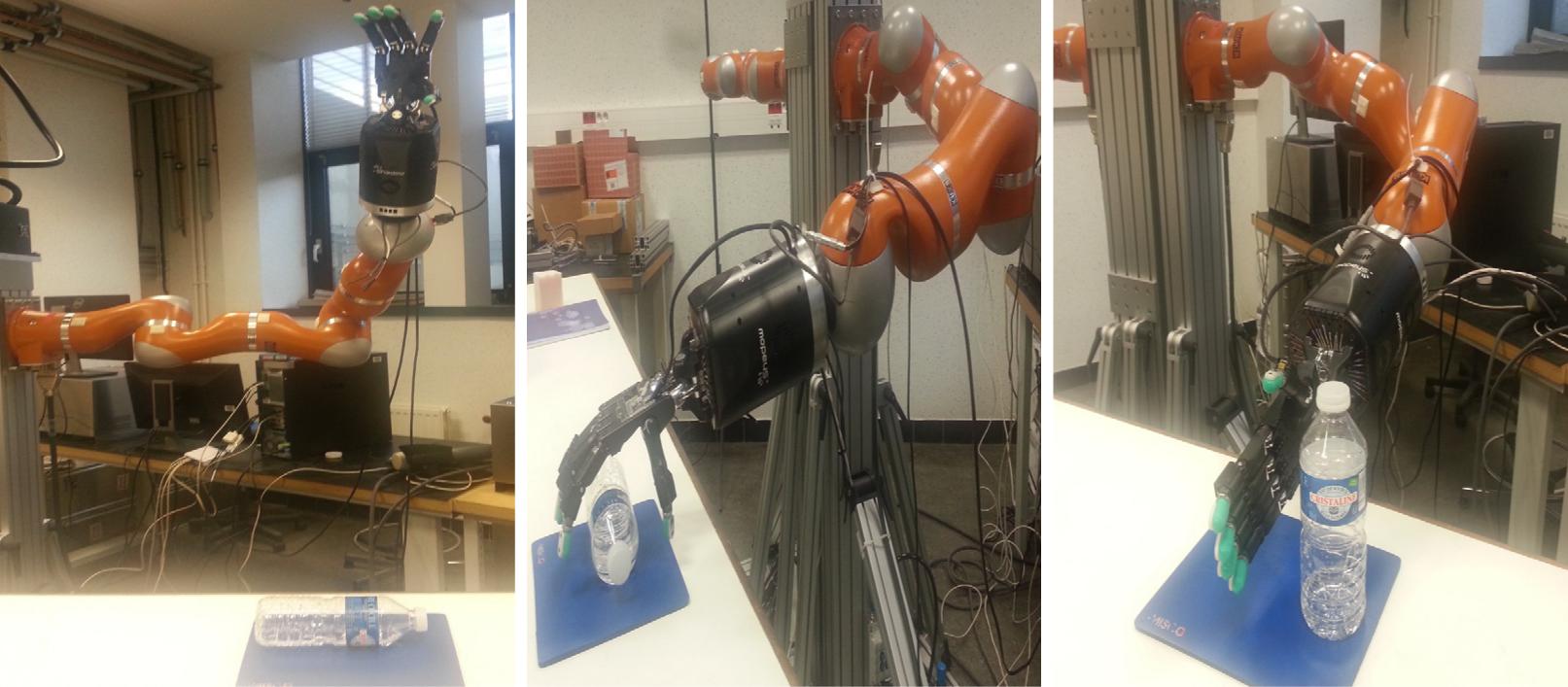
*Матрично-векторное представление формы*. Для вычисления кинематики обратной скорости можно переписать (12) в терминах действительных чисел, а не двойственных чисел, и поместить его в матрично-векторную форму, как показано ниже:

 (17)

Где и имеют вид:

(18)

(19)



**Рис. 2**. Первоначальная конфигурация робота Armand бутылки (слева). Желаемая досягаемость поза руки робота, чтобы схватить бутылку (средний). Желательно исправить положение бутылки после захвата и оставляя его на стол (справа).

Обратите внимание, что для 6-степенного манипулятора, которая состоит только из поворотных суставов, Eq. (17) дает хорошо известную структуру робота Якобиана:

(20)

Теперь можно использовать линейные алгоритмы алгебры на (17) решить для общих движений.

## 3. Кинематическое управление

### 3.1. Рабочий орган создает ошибку

Определим погрешность единичного двойного кватерниона, , как разность между текущего положения рабочего органа при и желаемой позой конечного эффектора при в домашнем кадре

(21)

Где текущее положение рабочего органа и обратное искомого положения рабочего органа объявление которой осуществляется посредством классического кватернион сопряженного дуального кватерниона.

### 3.2. Закон управления

Определим закон декартовый закон управления в двойное пространство с точки зрения логарифма ошибку дуального кватернион:

(22)

где λ-положительный скалярный коэффициент усиления управления. Закон управления (22) имеет глобальное экспоненциальное поведение сходимости. Доказательство этого поведения может быть прослежено через анализ раздела 3.3. Кроме того, можно найти другое доказательство в [1] для того же закона управления для случая свободных твердых тел. В остальной части этого раздела, Для простоты уравнений, мы отбросим высокие и нижние индексы переменных (например, ). Используя (1), мы можем переписать (22) как:

(23)

где {θ, d, **ℓ**, **m**} теперь параметры перемещения винта, полученные из блока ошибок дуальных кватернион . В следующем подразделе мы проанализируем устойчивость предлагаемого закона управления.

### 3.3. Анализ устойчивости

Для анализа устойчивости предложенного закона управления запишем следующую положительно определенную функцию кандидата Ляпунова:

(24)

где " ◦ " - биоператор для векторного точечного произведения между элементами связанных левого и правого двойных кватернионов. Затем мы дифференцируем эту функцию кандидата Ляпунова V по времени, чтобы мы могли проверить ее отрицательную определенность. Это дает:

(25)

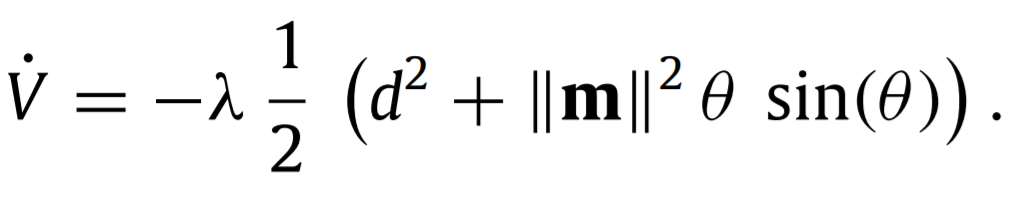
где производная от единицы погрешности дуального кватерниона может быть переписана в терминах угловой скорости (т. е. декартова закона управления), выраженного в домашней рамы робота (так называемом пространственном рамы) следующим образом:

(26)

Подставляя (26) В (25), получаем:

(27)

где декартов закон управления, записанный в пространстве дуальных квантеринов путем дополнения его вещественной и двойной частей нулевыми скалярами. Разложив (27) по параметрам винта и затем упростив его, получим следующее выражение:

 (28)

Затем, анализируя (28), мы приходим к выводу, что

Если (29)

Следовательно, если (29) справедливо и якобиан робота манипулятора (13) необособлен, то закон управления глобально экспоненциально стабилен.

## 4. Эксперименты

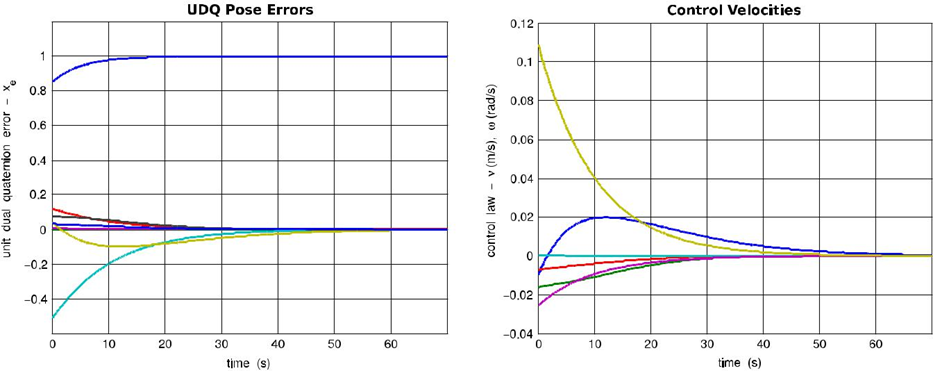
Проверим представленную формулировку на руке робота Kuka LWR IV с семью степенями подвижности, которая оснащена отражённой рукой [22]. В эксперименте мы сначала протягиваем руку, чтобы схватить бутылку, лежащую на столе из известной позы, затем после захвата мы исправляем положение бутылки и ставим ее обратно. На рисунке 2 левое изображение показывает начальную конфигурацию робота манипулятора Kuka и вдобавок отражённую руку и бутылку, лежащую на столе. На рисунке 2 среднее изображение показывает желаемую позу досягаемости руки робота, а правое изображение показывает желаемую скорректированную позу бутылки

Рис. 3. Эволюции ошибки блока дуальных кватернионов (слева) и закон управления (справа) в зависимости от времени при достижении схватить бутылку.

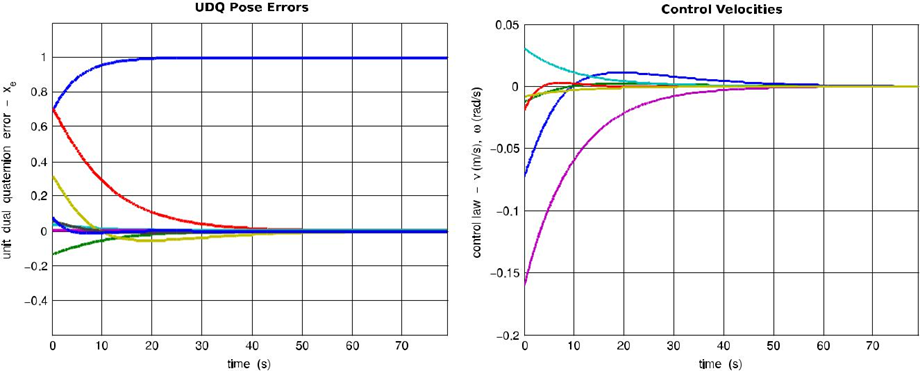


Рис. 4. Эволюции ошибки дуальных кватернионов единицы (слева) и закон управления (справа) в зависимости от времени при коррекции осанки бутылки, чтобы положить его обратно

На рисунке 3 изображены эволюционные изменения ошибок дуальных кватернионов и закона управления в зависимости от времени при движении к нужной точке досягаемости, показанной на изображении 2 в середине. На рисунке 4 изображены эволюции блоков ошибок дуальных кватернионов и закона управления в зависимости от времени при корректировке положения бутылки в сторону желаемого положения, показанного на правом изображении 2. Наконец, на рисунке 5 показаны следы декартовых поз рабочего оргпна, зарегистрированные во время выполнения всего манипуляционного задания. Можно наблюдать из фиг. 3 и 4, что оба достижения к бутылке и коррекции его осанки задачи успешно реализованы.

## 5. Выводы

В этой статье использовались дуальные кватернионы для моделирования кинематики, а затем для управления положением робота манипулятора. Моделирование компактно и быстро. Поэтому вычисление закона управления происходит быстро. Кроме того, пространство задач не содержит сингулярностей. Эта формулировка обеспечивает важное преимущество, если использовать ее для моделирования и управления роботизированной системой, которая имеет много степеней свободы, такой как гуманоидный робот.

Эта работа может послужить основой для будущих исследований по динамическому моделированию и управлению роботизированным вооружением более компактным и эффективным способом, чем существующие методы с использованием дуальных кватернионов

## Приложение

### А. 1. Кватернионы

Ирландский математик сэр Уильям Гамильтон ввел кватернион в 1843 году в качестве геометрического оператора для отображения двух векторов друг к другу в трехмерном пространстве. Под отображением он подразумевает отражение, вращение и масштабирование. Большинство программ используют только вращения. Это ограничивает кватернионы которые имеют значения и которые используют только операцию умножения для объединения различных вращений. Множество кватернионов ℍ можно рассматривать как четырехмерное псевдовекторное пространство над вещественными числами . Кватернион **q** ∈ ℍ может быть представлен вещественной скалярной частью и мнимой векторной частью

(A. 1)

Два кватерниона можно умножить друг на друга следующим образом:

(А. 2)

где векторное точечное произведение, а ’ × " - векторное поперечное произведение. Умножение кватернионов ассоциативно, но не коммутативно.

*Конъюгат и норма*. Конъюгат и нормой кватерниона приведены в таблице ниже:

(А. 3)

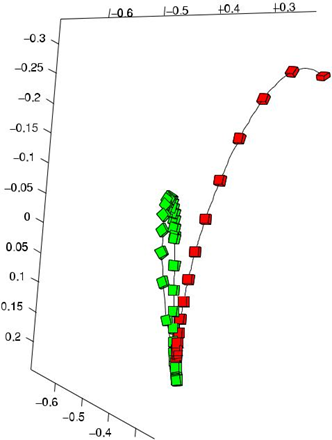


Рис. 5. Декартова траектория позиций рабочего органа при достижении схвата (красный), а затем при исправлении положения (зеленый) бутылки, чтобы положить её обратно. (Для интерпретации ссылок на цвет в этой легенде рисунка читатель обращается к веб-версии этой статьи.)

(A. 4)

Если то блок кватерниона, а также его инверсия

*Вращение*. Можно записать трехмерное вращение, выраженное углом вокруг единичного вектора **ℓ**, в терминах кватерниона следующим образом:

(A. 5)

Чтобы повернуть мнимый кватернион (т. е. кватернион с нулевой скалярной частью) представляющий вектор в трехмерном пространстве, нужно просто до и после умножить на кватернион и его сопряженное, соответственно:

(A. 6)

где повернутый мнимый кватернион .

*А. 2. Дуальное число*

Английский математик сэр Уильям Клиффорд ввел множество двойных чисел D и его алгебру в 1873 году. Он определил двойное число следующим образом:

(A. 7)

Где действительная часть, а двойная часть. Геометрически двойное число может представлять 2D вектор положения в двойной плоскости. Приведенное выше выражение можно переписать следующим образом:

(A. 8)

где модуль и аргумент для Операция умножения для двойных чисел, еще раз, дает колорит геометрического преобразования:

(A. 9)

который масштабирует и сдвигает. Если умножение двойного числа является единицей (т. е. r = 1), то отображение является чистым сдвигом на 2D-векторе положения, выраженном Двойные числа могут также выражать 2D плоские линии и их произвольные движения с помощью полярных координатных параметров.

*А. 3. Линии Плюккера как дуальные векторы*

Немецкий математик определил двойную угловую нотацию, которая связывает произвольную трехмерную пространственную линию **s** с заданной трехмерной пространственной линией вращением θ вокруг единственной оси (общей нормали двух пространственных линий) и с перемещением D вдоль той же оси. Рис. А. 6 (слева). Таким образом, 3-я запись двойных углов однозначно выражает трехмерную пространственную линию относительно осей эталонного декартова кадра. Эта 3-я запись двойных углов дает единичное двойное векторное представление с помощью координат Плюккера:

(A. 10)

где вещественная часть ℓ-единичный вектор направления линии s, а двойственная часть m = (p × ℓ) - момент линии около начала координат O, ортогональный ℓ. P-произвольная точка, лежащая на прямой. Рис. А. 6 (справа). Внутреннее произведение двух единичных двойных векторов, представляющих две косые линии (например, sˆ0 и sˆ), дает Косинус двойного угла(например, cos (θ )ˆ), который связывает одну линию с другой.

*А. 4. Дуальные кватернионы*

Дуальныйкватернион может выражать либо позу (как ориентацию, так и положение), либо перемещение твердого тела в трехмерном декартовом пространстве. Жесткое тело может быть смещено путем умножения его позы на дуальный кватернион с единицей перемещения двойного кватерниона. Двойной кватернион пишется как двойное число с компонентами кватерниона:

(A. 11)

Где и кватернионы.

*Умножение*. Умножение двух двойных кватернионов дает следующее уравнение:

(A. 12)

*Конъюгаты*. Существует три различных конъюгата двойного кватерниона:

1. *Классический кватернионный конъюгат*. Он используется для преобразования 3D линии.

(A. 13)

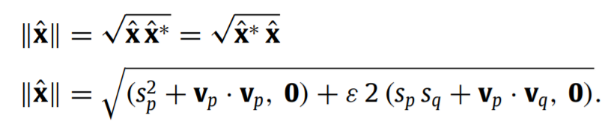
2. *Двойной конъюгат*

(A. 14)

3.*Комбинированный конъюгат*. Он используется для 3D-преобразования точек.

. (A. 15)

*Норма*. Норма дуального кватерниона задается как:

 (А. 16)

(А. 17)

Если

 (А. 18)

тогда То есть является дуальным кватернионом и его обратное

*Перемещение.* Можно построить дуальный кватернион, чтобы выразить смещение следующим образом:

(A.19)

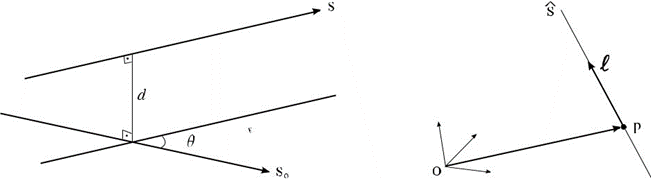


Рис. А.6. Линии- (слева): Двойной угол выражает относительное положение линии по отношению к другой линии. (Справа): Геометрия линии Плюккера.

Где единичный кватернион, представляющий вращение, как показано в (A. 5), **1** обозначает тождественный кватернион: (1, **0**), а кватернион, описывающий перемещение с вектором **t**. левое уравнение в (A. 19) (соотв. правое уравнение) сначала переводит, затем поворачивает (соотв. вращает, а затем переводит) 3D-геометрический объект (например, точку, линию). Дуальный кватернион, который только вращается ( ) или только переводит () , может быть записан из (A. 19) следующим образом:

(А. 20)

и, следовательно, дуальный кватернион идентичности равен Относительное смещение между двумя жесткими телами может быть вычислено путем умножения дуального кватерниона положения первого твердого тела на обратный (или сопряженный) дуальный кватернион положения второго твердого тела:

(А. 21)

или наоборот.

*А.5. От конечного поворота к единичному двойному кватерниону*

Пусть **ζ** -- конечный поворот в se(3), тогда он может быть явно записан с конечным вращением и конечным переводом о геометрической винтовой линии следующим образом [28]:

(A. 22)

Затем мы можем извлечь параметры винта смещения из этого конечного поворота, как показано ниже:

(А. 23)

После этого легко написать соответствующее двойное представление кватерниона, см. (3) и (4).

*А. 6. От дуального кватерниона до винтовых параметров*

Пусть дуальный кватернион с и Мы можем вычислить угол поворота θ следующим образом:

(А. 24)

После этого у нас есть следующие два случая для вычисления остальных параметров винта:

*Случай, когда* и

(A.25)

(A.26)

(A.27)

*Случай, когда*

(A.28)